Morphismes d'extensions - TD 7

1. Soit F un corps fini avec $|F| = p^n$ où p est un nombre premier. Montrer que F est le corps de décomposition d'un polynôme irréductible dans $\mathbb{F}_p[x]$ de degré n.

2. Déterminer $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathbb{C})$ et $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(E)$ pour

(a) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
(b) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
(c) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.
(d) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, i)$.
(e) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
(f) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$.
(g) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$.
(h) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}, i)$.
(i) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.
(j) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{3})$.
(k) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.
(l) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{3}, i)$.

3. Soit Ω une extension algébriquement close de $\mathbb{F}_3$, et soit E le corps de décomposition du polynôme $x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$. Déterminer $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_3}(E, \Omega)$ et $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_3}(E)$.

4. Soit Ω une extension algébriquement close de $\mathbb{F}_3(t)$, et soit E le corps de décomposition du polynôme $x^3 - t^2 - t - 1 \in \mathbb{F}_3(t)[x]$. Déterminer $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_3(t)}(E, \Omega)$ et $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_3(t)}(E)$.